第21講　面積

21

［A］ $a>1$ に対して，$S(a)$ を3つの曲線

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=a\cos x \quad \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

で囲まれた部分の面積とする．

(1) $S(a)$ を a の式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to1}\frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ．

［B］ 方程式 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y}=2\sqrt{2}$ で表される曲線を C，

方程式 $y=x+9+\dfrac{12}{x+4}-4\sqrt{2(x^2+1)}$ で表される曲線を D とするとき，曲線 C と曲線 D で囲まれた図形の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　面積

21　$f(x)=(1+\log x)(e^{x\log x}-x^2)$ とする．

(1)　$e^{x\log x}$ の導関数を求めよ．不定積分 $\int x^2\log x\,dx$ を求めよ．

(2)　$e^{x\log x}=x^2$ となる x の値を求めよ．

(3)　曲線 $y=f(x)$ $(x\geqq 1)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　面積

21

［A］ $a>1$ に対して，$S(a)$ を３つの曲線

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=a\cos x\quad\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

で囲まれた部分の面積とする．

(1) $S(a)$ を a の式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to1}\frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ．

［B］ 方程式 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y}=2\sqrt{2}$ で表される曲線を C，

方程式 $y=x+9+\dfrac{12}{x+4}-4\sqrt{2(x^2+1)}$ で表される曲線を D とするとき，曲線 C と曲線 D で囲まれた図形の面積を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $S(a)=-\sqrt{a^2+1}+a+\sqrt{2}-1$　(2) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

［B］ $12\log 3-\dfrac{16}{3}$

【解説】

［A］ (1) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $y=\sin x$ と $y=\cos x$ の共有点の x 座標は $x=\dfrac{\pi}{4}$ となる．

また $y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における共有点の x 座標を t とおくと

$$\sin t=a\cos t\qquad\therefore\quad\tan t=a$$

このとき

$$\sin t=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}},\qquad\cos t=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{t}\sin x\,dx+\int_{t}^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\&=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{t}+\Big[a\sin x\Big]_{t}^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\left(-\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+a(1-\sin t)-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+a-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\boldsymbol{-\sqrt{a^2+1}+a+\sqrt{2}-1}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(1)の結果より

$$\lim_{a\to1}\frac{S(a)}{a-1}=\lim_{a\to1}\frac{-\sqrt{a^2+1}+a+\sqrt{2}-1}{a-1}=\lim_{a\to1}\left(1-\frac{a+1}{\sqrt{2}+\sqrt{a^2+1}}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

［B］　曲線 C について

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y}=2\sqrt{2}$$

$$\iff \sqrt{y}=2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+1}$$

$$\iff y=(2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+1})^2 \text{ かつ } 2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+1}\geqq0$$

$$\therefore\ y=9+x^2-4\sqrt{2(x^2+1)} \text{ かつ } -\sqrt{7}\leqq x\leqq\sqrt{7}$$

となる．ここで

$$\left\{x+9+\frac{12}{x+4}-4\sqrt{2(x^2+1)}\right\}-\{9+x^2-4\sqrt{2(x^2+1)}\}$$

$$=-x^2+x+\frac{12}{x+4}$$

$$=-\frac{(x-2)(x+2)(x+3)}{(x+4)}\quad\cdots\cdots①$$

$-\sqrt{7}\leqq x\leqq\sqrt{7}$ において ①$=0$ の解は $x=\pm2$ だけであり，$-2\leqq x\leqq2$ において ①$\geqq0$ なので，求める面積は

$$\int_{-2}^{2}\left(-x^2+x+\frac{12}{x+4}\right)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\Big[12\log(x+4)\Big]_{-2}^{2}$$

$$=\boldsymbol{12\log3-\frac{16}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　面積

21　$f(x)=(1+\log x)(e^{x\log x}-x^2)$ とする．

（1）$e^{x\log x}$ の導関数を求めよ．不定積分 $\int x^2\log x\,dx$ を求めよ．

（2）$e^{x\log x}=x^2$ となる x の値を求めよ．

（3）曲線 $y=f(x)$ （$x\geqq 1$）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

【答】 (1) $e^{x\log x}(\log x+1)$, $\dfrac{1}{9}x^3(3\log x-1)+C$ （C は積分定数） (2) $x=1$, 2

(3) $\dfrac{8}{3}\log 2-\dfrac{13}{9}$

【解説】

(1)　$y=e^{x\log x}$ とおくと $\log y=x\log x$　この両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\log x+1 \qquad \therefore\ y'=y(\log x+1)$$
$$=\boldsymbol{e^{x\log x}(\log x+1)}$$

また $\left(\dfrac{1}{3}x^3\log x-\dfrac{1}{9}x^3\right)'=x^2\log x$ より

$$\int x^2\log x\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{9}x^3(3\log x-1)+C}\quad \textbf{（}C\textbf{ は積分定数）}$$

(2)

$$e^{x\log x}=x^2 \iff x\log x=\log x^2$$
$$\iff (x-2)\log x=0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{x=1,\ 2}$$

(3)　$x\geqq 1$ のとき $1+\log x>0$　よって曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標は(2)より $x=1$, 2　ここで $1<x<2$ のとき

$$x-2<0 \text{ かつ } \log x>0 \iff (x-2)\log x<0$$
$$\iff e^{x\log x}<x^2$$
$$\therefore\ f(x)<0$$

であるので，求める面積は

$$\int_1^2\{-f(x)\}dx$$
$$=\int_1^2\{-e^{x\log x}(\log x+1)+x^2\log x+x^2\}dx$$
$$=\left[-e^{x\log x}+\frac{1}{9}x^3(3\log x-1)+\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$
$$=\left[-e^{x\log x}+\frac{1}{9}x^3(3\log x+2)\right]_1^2$$
$$=\left\{-4+\frac{8}{9}(3\log 2+2)\right\}-\left\{-1+\frac{1}{9}(0+2)\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{8}{3}\log 2-\frac{13}{9}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。